



TITLE:

クリスタルから見た箱玉系 (可積分 系数理の展望と応用)

AUTHOR(S):

国場, 敦夫; 尾角, 正人; 山田, 泰彦

CITATION:

国場, 敦夫 ...[et al]. クリスタルから見た箱玉系 (可積分系数理の展望と
応用). 数理解析研究所講究録 2005, 1422: 44-55

ISSUE DATE:

2005-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/47204>

RIGHT:

クリスタルから見た箱玉系

東大総合文化 国場敦夫 (Atsuo Kuniba)

Graduate School of Arts and Sciences, University of Tokyo

阪大基礎工 尾角正人 (Masato Okado)

Graduate School of Engineering Science, Osaka University

神戸大理 山田泰彦 (Yasuhiko Yamada)

Department of Mathematics, Kobe University

1 はじめに

高橋・薩摩 [1] によって導入された「箱玉系」は、まず離散ソリトン方程式を「超離散化」という方法によって「可積分系」であるというお墨付が得られた [2]。一方、「可積分系」の由来を無限個の互いに可換な時間発展、あるいは、それに付随する無限個の独立な保存量に求めるやり方もある。このときに必要となるのはヤン・バクスター方程式の解であり、その解を箱玉系のような超離散系に対し系統的に与えるのがクリスタルである。本稿では、箱玉系をクリスタルから見るとどうなるかについて「無限系」、「反射系」、「周期系」に分けてなるべく平易な解説を試みる。そして現在どのようなことがわかっているかを整理し、さらに「こんなことがわかれば面白いだろうなあ」ということを述べて研究会名にあった「展望」に代えることとしたい。

我々は、「箱玉系」の研究はまだ始まったばかりでまだまだ面白いことが出てくると思っているが、残念ながらもうそう若いとはいえない歳になってしまった。この講究録を読んだ方の中から「展望」で述べたことをどんどん解決していく元気な若者が出てくることを願ってやまない。そう、この原稿を読むときの心構えとして、九大の梶原さんの言葉 [3] を借りよう。「むしろ、これさえ読めば研究の最先端であって、納得できないところはすべて研究テーマであり、なんだこの程度しかわかっていないのか、と解釈するべきである。隙あらば論文の一本二本は書いてやる、といった意気込みで'挑む'のがよい。」

2 無限系

2.1 クリスタル流の見方

箱玉系は空間については1次元なので無限系とは「左にも右にも境界がない」という意味である。ここでは色付容量1の箱玉系（「中級箱玉」とも呼ばれる）を取り扱う。用いられるクリスタルは $A_{n-1}^{(1)}$ 型アフィンリー環 ($n \geq 2$) の量子展開環の l 次対称テンソル表現から来るもので、 B_l とおく。クリスタルとは集合に色付有向グラフの構造が入ったものである。 B_l の場合、集合としては

$$B_l = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, x_1 + x_2 + \dots + x_n = l\}$$

というものであり、特に有限集合である。 B_l はよく横1行のヤング盤を用いて表示されるが（タブロ表示）、それは1が x_1 個、2が x_2 個、 \dots 、 n が x_n 個入ったタブロである。この B_l の2元に対し色 i ($i = 0, \dots, n-1$) の矢印が

$$(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \xrightarrow{i} (x_1, \dots, x_i - 1, x_{i+1} + 1, \dots, x_n)$$

のルールで引かれる。ただし、 $i = 0$ のとき $x_i = x_n$ とみなし、座標のうちに負の整数が現れればその矢印はないものと規約する。

さて、2つのクリスタル B_l, B_m にはテンソル積 $B_l \otimes B_m$ といわれるものが定義される。集合としては直積集合 $B_l \times B_m$ で、それに色付有向グラフの構造が入る [4]。今のクリスタルに特徴的なのは $B_l \otimes B_m$ と $B_m \otimes B_l$ のグラフ構造が同じになることである。これは対応する量子展開環の表現が同型であることからの帰結である。よって次のような bijection があり、

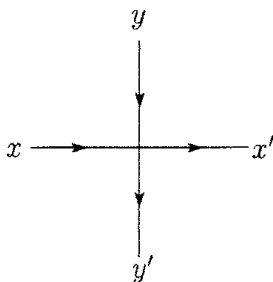
$$\begin{aligned} R : \quad B_l \otimes B_m &\longrightarrow B_m \otimes B_l \\ x \otimes y &\longmapsto y' \otimes x' \end{aligned}$$

これを組合せ R と呼ぶ。この関係を Figure 1 のように図示することにする。本稿では詳しく述べないが、この図の状態に対しエネルギー $H(x \otimes y) \in \mathbb{Z}$ を対応させることができ、これが箱玉系の時間発展に関する保存量を構成するときに用いられる。

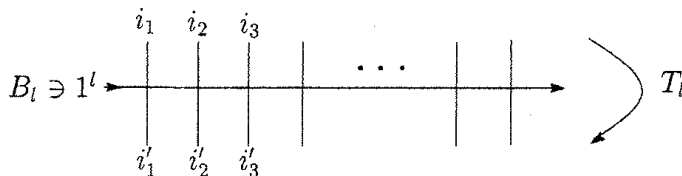
箱玉系の状態とは B_1^∞ の元であって、有限個を除き成分が1であるものと定義される。つまりある十分大きな L があって、

$$\dots \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes i_1 \otimes i_2 \otimes \dots \otimes i_L \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \dots$$

となるような B_1^∞ の元である。1あるいは i_a はタブロ表示の B_1 の元であり、 1×1 box に数字が書かれるだけなので box は省略した。1は箱玉系の言葉では空箱に相当し、有限個を除き成分が1というのは玉の数が有限個であることに相当する。次に時間発展を定義し

Figure 1: 組合せ R 

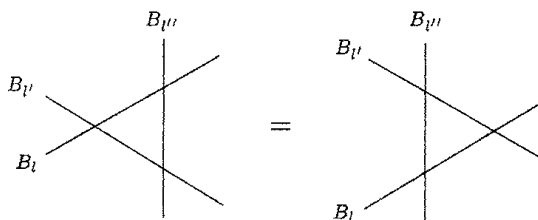
よう。Figure 2 を見てもらいたい。左の 1^l は B_l の元で、1 が横に l 個並んだタブロである。また、上の i_1, i_2, i_3, \dots は状態で左右の 1 (空箱) が無限に続いているところは無視し有限化して書いている。左の方から見ていき Figure 1 のような十字があれば組合せ R により南と東の元が定まると見ると、上の状態に対し下の状態 i'_1, i'_2, i'_3, \dots が一意的に定まる。この状態に対する作用を T_l ($l \geq 1$) と定義する。

Figure 2: 時間発展 T_l 

無限個の時間発展 $\{T_l\}_{l \geq 1}$ があるわけだが、実はこれらは可換である。

$$T_{l'} T_l = T_l T_{l'}$$

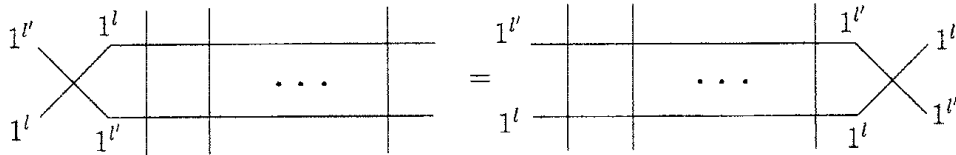
Figure 3: ヤン・バクスター方程式



証明はヤン・バクスター方程式 (Figure 3) を使う。図は次のように解釈する。 $B_l \otimes B_{l'} \otimes B_{l''}$ 上に組合せ R を三回非自明に作用させようとする $(R \otimes 1)(1 \otimes R)(R \otimes 1)$ (左辺) と

$(1 \otimes R)(R \otimes 1)(1 \otimes R)$ (右辺) の二通りが考えられるがそれらの結果は等しい。このヤン・バクスター方程式を認めれば、 T_l と $T_{l'}$ の可換性の証明は図 (Figure 4) を書けば終わりである (ただし、 $l'' = 1$ とおく)。

Figure 4: T_l と $T_{l'}$ の可換性の証明



さらにエネルギー関数 H を用いて T_l に対応して時間発展に関し不変な保存量 E_l を定義することができる。

$$E_l(T_{l'}(p)) = E_l(p) \quad \text{for } \forall l', \forall \text{ 状態 } p$$

詳しくは例えば [5] を参照されたい。

ソリトン状態についてもまとめておこう。

$$11 \cdots 1 i_1 i_2 \cdots i_k 1 \cdots 1 \quad (i_1 \geq i_2 \geq \cdots \geq i_k \geq 2)$$

という状態は、時間発展 T_l に関し速さ $\min(l, k)$ で右へ移動するためソリトンといえることができる。 k をそのソリトンの長さという。 $i_k i_{k-1} \cdots i_1$ と並べ替えると横一列タブロと見なせるので B_k の元と同一視できる。ただし、中の数字は 2 から n になっていることに注意 (ランクが -1 となる)。今度はこのようなソリトンが 2 つ、長さ k_1 のソリトンが左に長さ k_2 のソリトンが右 ($k_1 > k_2$) にあった場合、時間発展によってソリトンが衝突し、その後長さ k_1 のソリトンが長さ k_2 のソリトンを追い越したかのように運動する。この際 2 つのソリトンの内部自由度に変化が生じる。これをソリトンを B_{k_1}, B_{k_2} の元と同一視して写像

$$S: \begin{array}{ccc} B_{k_1} \otimes B_{k_2} & \longrightarrow & B_{k_2} \otimes B_{k_1} \\ x_1 \otimes x_2 & \longmapsto & x'_2 \otimes x'_1 \end{array}$$

で表すことにすると

$$S = R$$

が成立する。ただし、右辺の R はランクが -1 となっている。 S もヤン・バクスター方程式を満たすので、ソリトンが 3 つある場合 2 体散乱が 3 回起こるが結果はその順序によらないことがわかる。組合せ R が時間発展の定義、ソリトンの散乱則の 2 カ所に現れることがポイントである。

例をいくつか挙げよう。最初のもは第 1 行の状態を T_4 で次々に時間発展させたものである。 \cdot は空箱 1 を意味している。

```

..44322.....32.....
.....44322...32.....
.....44322.32.....
.....442.3322.....
.....42..43322.....
.....42....43322.....
.....42.....43322.

```

タブロ表示でこの散乱は $22344 \otimes 23 \rightarrow 24 \otimes 22334$ と表され、確かに組合せ R に一致している。次は3つのソリトンの散乱である。結果が2体散乱の順序によらないことが見て取れるだろう。

```

.4422..32.....3.....
.....442.322....3.....
.....42..4322.3.....
.....42....42332.....
.....42....2..4332.....
.....42...2....4332.....
.....42..2.....4332.....
.....42.2.....4332.....
.....4.22.....4332.

.4422.....32.3.....
.....4422.....323.....
.....4422.....233.....
.....4422.....2.33.....
.....4422....2..33.....
.....4422.2...33.....
.....4.4222.33.....
.....4....422332.....
.....4.....22.4332.

```

2.2 現状と課題

1. 一般のアフィンリー環 \mathfrak{g} を考える。そのディンキン図の頂点は通常 $0, 1, \dots, n$ でラベルされる。0を除く頂点 k および正整数 l に対しアフィン量子展開環 $U_q(\mathfrak{g})$ の有限次元表現でクリスタル基底 ($B^{k,l}$ と表される) をもつものが存在すると予想されている [6]。前述の B_l はこの記法では $\mathfrak{g} = A_{n-1}^{(1)}$ のときの $B^{1,l}$ である。他にもこのように系列で存在および組合せ R の具体形がわかっているのは

- (i) $\mathfrak{g} = A_{n-1}^{(1)} \quad \{B^{k,l}\}_{l \geq 1} \text{ for } 1 \leq k \leq n-1$

(ii) \mathfrak{g} : 非例外型 $\{B^{1,l}\}_{l \geq 1}$

である。それぞれに対しては全く同様に（一般化された）箱玉系が定義され、ソリトンの散乱則についても調べられている ((i) \Rightarrow [7], (ii) \Rightarrow [8])。課題はもうおわかりだろう。「クリスタルの存在を示し、それから定義される箱玉系を調べる」ことである。

2. ここで詳しく述べる余裕はないが、可解格子模型を解く2つの手法、ベーテ仮説、角転送行列法に由来する2つの多項式が等しいという予想 ($X = M$ 予想) [6]がある。右辺 M (フェルミ公式) は箱玉系の分配関数ととらえることもでき、更なる研究の広がりが期待される。詳しくは [9] を参照されたい。

3 反射系

3.1 クリスタル流の見方

今度は右側に端点がある系を考えよう。このような場合、可解格子模型ではヤン・バクスター方程式とともに反射方程式を考える。まず Figure 5 はクリスタル元 x が左からやってきて壁にぶつかり $K(x)$ という元に変化して右へ進むことを表している。もし2つの元が左からやってきた場合、壁との反射、元同士の散乱の順序として Figure 6 の2通りが考えられるが、そのどちらの場合が起きても結果は変わらないというのが反射方程式である。

Figure 5: 組合せ K

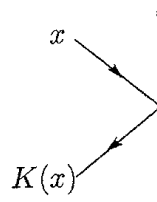
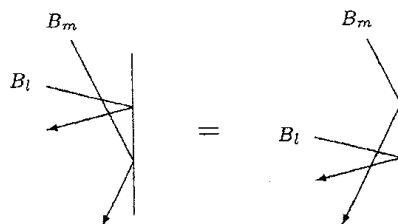


Figure 6: 反射方程式



我々は K (組合せ K と呼ぶ) を B_l から B_l 自身への写像と思って反射方程式の解を探したが、あまりおもしろいものが得られなかった。そこで B_l^\vee を B_l の双対 (グラフですべての矢印を反転したもの) とし K を $K: B_l \rightarrow B_l^\vee$ となる写像として反射方程式を考える。式で書くと $B_l \otimes B_m$ 上の等式

$$K_2 R^\vee K_2 R = R^{\vee\vee} K_2 R^\vee K_2 \quad (1)$$

となる。ただし、 $R, R^\vee, R^{\vee\vee}$ は組合せ R

$$\begin{aligned} R: B_l \otimes B_m &\longrightarrow B_m \otimes B_l \\ R^\vee: B_m \otimes B_l^\vee &\longrightarrow B_l^\vee \otimes B_m \\ R^{\vee\vee}: B_m^\vee \otimes B_l^\vee &\longrightarrow B_l^\vee \otimes B_m^\vee \end{aligned}$$

で K_2 は K がテンソル積の第2成分に作用することを表す。 $R, R^\vee, R^{\vee\vee}$ は既知であり、 K を未知として (1) の解を探す。 K が座標 (x_1, x_2, \dots, x_n) の置換で与えられるものを計算機で探したら次の3つの解が見つかった。

- *Rotateleft* $K(x) = (x_2, \dots, x_n, x_1)$
- *Switch₁₂* $K(x) = (x_2, x_1, x_4, x_3, \dots)$
- *Switch_{1n}* $K(x) = (x_n, x_3, x_2, \dots, x_1)$

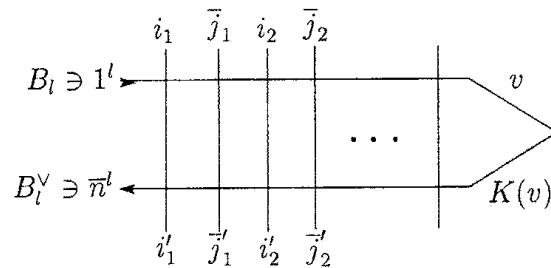
もちろん *Switch₁₂*, *Switch_{1n}* では n は偶数でなければならない。以下 $K = \text{Rotateleft}$ として説明する。無限系の場合と同様、状態、時間発展を定義しよう。まず状態は $(B_1 \otimes B_1^\vee)^{\otimes \infty}$ の元で有限個を除き成分が $1 \otimes \bar{n}$ (\bar{n} は B_1^\vee の元であることを表す) となっているものと定義する。つまり、この $1 \otimes \bar{n}$ は空箱に相当するわけである。時間発展 T_1 の定義は Figure 7 を見てもらいたい。左端の B_l の元 1^l が右へ走って壁に反射し、また左端へ行って時間が1ステップ進む。この場合も2章の無限系の場合同様、時間発展の可換性を示すことができる。この際、ヤン・バクスター方程式とともに反射方程式も用いられる。詳しくは [10] を参照されたい。

さてこの系のソリトンには時間発展によって右へ進むもの (右ソリトン) と左へ進むもの (左ソリトン) があり、それぞれ次のような形をしている。

$$\text{右ソリトン: } i_1 \bar{n} \otimes i_2 \bar{n} \otimes \dots \otimes i_k \bar{n} \quad (n-1 \geq i_1 \geq i_2 \geq \dots \geq i_k \geq 2)$$

$$\text{左ソリトン: } 1 \bar{j}_1 \otimes 1 \bar{j}_2 \otimes \dots \otimes 1 \bar{j}_k \quad (2 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_k \leq n-1)$$

右ソリトン B_k の元と左ソリトン B_k^\vee の元と一対一に対応していることに注意しよう。ただし、1 と n が欠けているのでランクは -2 となっている。この反射系の場合に知られている主な結果をまとめると次のようになる。

Figure 7: 時間発展 T_l (反射系)

1. 右ソリトンの反射は K で与えられる
2. 右ソリトン同士の散乱は R で与えられる
3. 左ソリトン同士の散乱は $R^{\vee\vee}$ で与えられる
4. 右ソリトンと左ソリトンの散乱は R^\vee で与えられる

よって、これらの系として多体ソリトンの反射、散乱は1体の反射および2体の散乱の順序によらないということがいえる。

例を挙げてこの節を終える。いずれの例でも $n = 6$ であり \dots は $1\bar{6}$ を表す。また 46 は本来 $4\bar{6}$ と書かれるべきものである。最初の例はソリトンの反射である。 $2445 \rightarrow 3345$ と変化しており 1 と 6 を除いて Rotateleft である。

```

.. .. 56 46 46 26 .. .. .. .. ..
.. .. .. .. 56 46 46 26 .. .. .. ..
.. .. .. .. .. 56 46 46 26 .. .. .. ..
.. .. .. .. .. .. 56 46 46 26 .. .. ..
.. .. .. .. .. .. .. 56 46 46 26 .. ..
.. .. .. .. .. .. .. .. 56 46 41
.. .. .. .. .. .. .. .. .. 13 13 14 15
.. .. .. .. .. .. .. .. .. 13 13 14 15 .. ..
.. .. .. .. .. .. .. .. .. 13 13 14 15 .. ..
.. .. .. .. .. .. .. .. .. 13 13 14 15 .. ..
.. .. .. .. .. .. .. .. .. 13 13 14 15 .. ..

```

次の2つの例は2ソリトンの反射、散乱である。結果はそれらが起きる順序に依らない。

```

.. .. 56 46 36 36 26 .. .. 56 46 26 .. .. .. ..
.. .. .. .. 56 46 36 36 26 .. .. 56 46 26 .. .. .. ..
.. .. .. .. .. 56 46 36 36 .. 56 46 26 26 .. .. .. ..
.. .. .. .. .. 56 46 36 .. .. 56 46 36 26 26 .. .. ..
.. .. .. .. .. 56 46 36 .. .. .. .. 56 41 31
.. .. .. .. .. 56 46 32 13 14 15 15
.. .. .. .. .. 12 12 13 14 15 .. 46 36 26 ..
.. .. .. .. .. 12 12 13 14 15 .. .. .. .. 11 42
.. .. .. .. .. 12 12 13 14 15 .. .. .. .. 12 13 15 ..
.. .. .. .. 12 12 13 14 15 .. .. .. .. 12 13 15 .. .. ..
.. 12 12 13 14 15 .. .. .. .. 12 13 15 .. .. .. ..

.. .. 56 46 36 36 26 .. .. .. .. 56 46 26 .. .. .. ..
.. .. .. .. 56 46 36 36 26 .. .. .. .. 56 46 26 .. ..
.. .. .. .. 56 46 36 36 26 .. .. .. .. 56 46 26
.. .. .. .. 56 46 36 36 26 .. .. .. .. 13 64
.. .. .. .. 56 46 32 24 25 .. ..
.. .. .. .. 12 13 14 .. .. 11 41 32
.. .. .. .. 12 13 14 .. .. 12 12 13 15 15 ..
.. .. .. .. 12 12 13 14 .. 12 13 15 15 .. .. ..
.. .. .. .. 12 12 13 14 15 .. .. 12 13 15 .. .. ..
.. .. .. .. 12 12 13 14 15 .. .. 12 13 15 .. .. ..
.. 12 12 13 14 15 .. .. .. 12 13 15 .. .. .. ..

```

3.2 現状と課題

反射系の場合に現在わかっている結果は [10] のみである。課題はいろいろあると思うが次の3つを挙げておく。

1. 上述の反射系は右ソリトンの様子が同じであるという意味で 2.1 章の箱玉系を含んでいると考えることができる。同様に 2.2 章 1 の (i) または (ii) を含んでいる反射系を作りなさい。

2. 2 章の無限箱玉系は離散ソリトン方程式から導出できることが知られている [2]。同様に 3.1 章の反射系を適当な境界付離散ソリトン方程式から導出しなさい。あるいは壁が無限の右にあると考えて境界がない場合でも構わない。

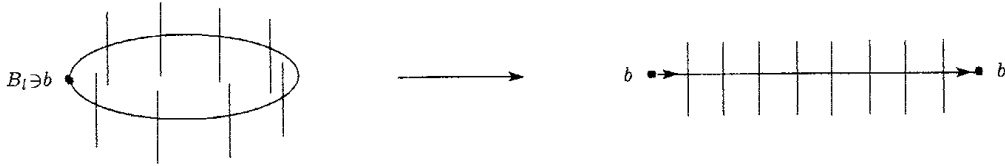
3. この章で紹介したのは片側でのみ反射する半無限系であるが、両側で反射できるおもしろい有限系を作りなさい。一見簡単そうであるが、時間発展の定義 (Figure 7) で左からいつも $1'$ を入れることができなくなる。同様のことは次章の周期系でも起こるのでそこも参照されたい。ある試みについては [10] の Discussion を参照。

4 周期系

周期的箱玉系については時弘氏らによる先駆的研究 [11] があるが、クリスタル流の見方からの研究はまだほとんど進んでいない。よって、この章では予想と課題を記すにとどめる。

4.1 予想と課題

Figure 8: 周期的箱玉系



無限系の時間発展の定義では (Figure 2) 左から 1^l を入れれば右からまた 1^l が出て行ったわけだが、定まった長さの有限系になるとこれが保証されなくなる。周期系では Figure 8 のように周期的境界条件を課すので、右の図のように切り開いて見てみれば、左から入って組合せ R で右に運んでも等しい元が B_l に存在すれば時間発展 T_l が定義できることになる。実際、計算機で調べてみると確かにこのような元は存在し、複数個ある場合でも T_l はそれらに依存しないようだ。また T_l と $T_{l'}$ の可換性も成り立っているようだ。まとめると次の予想となる。

予想 1. すべての状態 $p \in B_1^{\otimes L}$ と $l = 1, 2, \dots$ に対し、ある $b \in B_l$ が存在して

$$\begin{aligned} B_l \otimes B_1^{\otimes L} &\longrightarrow B_1^{\otimes L} \otimes B_l \\ b \otimes p &\longmapsto p' \otimes b \end{aligned}$$

となる。 p' はこのような b に依らない。

これにより $T_l(p)(= p')$ が定義される。また、上のような b の集合を $Thr_l(p)$ と書くと、

予想 2. $b_1 \in Thr_l(p), b_2 \in Thr_{l'}(T_l(p))$ に対し、 $R : B_{l'} \otimes B_l \longrightarrow B_l \otimes B_{l'}$ により $b_2 \otimes b_1 \longmapsto b'_1 \otimes b'_2$ となっているならば、 $b'_2 \in Thr_{l'}(p), b'_1 \in Thr_l(T_{l'}(p))$ である。

予想 2 が成立しているならば、無限系の Figure 4 での論法と同様に時間発展の可換性を示すことができる。次の例は $l = 3$ のときに計算機で予想 1 のような b を求めながら、時間発展 T_3 を施していったものである。

4332...32.42....3.....
 ...4332.32.42....3.....
432.33.422.3.....
42.33.43232...
42.33..24332
 332.....42.33.2..4
 ..4332.....42.3.32.
 2....4332.....423..3
 .32.....4332.....243.
 3..32.....4332.....2.4
 .43..32.....4332...2.
 ...43..32.....4332.2
 322..43..32.....43.

課題はおわかりだろう。「予想を証明せよ」である。一見簡単な組合せ論の問題のようであるが筆者らは ($l = 1$ や l が十分大のときの予想 1 を除き) まだ証明をもっていない。予想が証明されたら、「無限系で既に知られている箱玉系 (2.2 章 (i)(ii)) へ拡張せよ」という課題が続く。

謝辞：関連する話題で共同研究を続けている高木太一郎氏に感謝します。

References

- [1] D. Takahashi and J. Satsuma, *A soliton cellular automaton*, J. Phys. Soc. Jpn. **59** (1990) 3514–3519.
- [2] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira and J. Satsuma, *From soliton equations to integrable cellular automata through a limiting procedure*, Phys. Rev. Lett. **76** (1996) 3247–3250;
 T. Tokihiro, A. Nagai and J. Satsuma, *Proof of solitonical nature of box and ball systems by means of inverse ultra-discretization*, Inverse Probl. **15** (1999) 1639–1662.
- [3] 梶原健司, 「数学」2004年七月号の「広田良吾、高橋大輔著：差分と超離散」に対する書評
- [4] M. Kashiwara, *Crystallizing the q -analogue of universal enveloping algebras*, Comm. Math. Phys. **133** (1990) 249–260.
- [5] K. Fukuda, M. Okado, Y. Yamada, *Energy functions in box ball systems*, Int. J. Mod. Phys. A **15** (2000) 1379–1392.

- [6] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi and Z. Tsuboi, *Paths, crystals and fermionic formulae*, “MathPhys Odyssey 2001–Integrable Models and Beyond In Honor of Barry M. McCoy”, Edited by M. Kashiwara and T. Miwa, Birkhauser (2002), 205–272.
- [7] D. Yamada, *Box ball system associated with antisymmetric tensor crystals*, preprint(math.QA/0312461).
- [8] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi and Y. Yamada, *Scattering rules in soliton cellular automata associated with crystal bases*, Contemporary Math. **297** (2002) 151–182.
- [9] A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi and Y. Yamada, 箱玉系の頂点作用素と分配関数, 数理解析研究所講究録 **1302**, (2003) 91–107;
T. Takagi, *Inverse scattering method for a soliton cellular automaton*, preprint(math-ph/0406038).
- [10] A. Kuniba, M. Okado and Y. Yamada, *Box-ball system with reflecting end*, in preparation.
- [11] T. Kimijima and T. Tokihiro, *Initial-value problem of the discrete periodic Toda equation and its ultradiscretization*, Inverse Problems **18** (2002) 1705–1732;
D. Yoshihara, F. Yura and T. Tokihiro, *Fundamental cycle of a periodic box-ball system*, J. Phys. A **36** (2003) 99–121.